Варианты задач вступительного экзамена по математике на механико-математический факультет в 1971 году.

Вариант 31

1. Решить уравнение

$$(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\frac{8}{3}\log_2(x^2-1)$$

Ответ: $x=3,\ x=\frac{4}{3}$

2. Найти все x из отрезка $0\leqslant x\leqslant\pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x-\cos x+\sqrt{2}\sin x>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}\leqslant x<\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{6}\pi<x\leqslant\pi.$

3. Все грани трехугольной пирамиды – равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

Ответ: $\frac{2}{3}$

4. Найти все значения α, при которых система неравенства

$$\begin{cases}x^2+2x+\alpha\leqslant 0\\ x^2-4x-6\alpha\leqslant 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $\alpha=0,\ \alpha=1.$

5. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB=2BC$

Ответ: $\frac{8R^2}{5}$

Вариант 32

1. Решить уравнение

$$x^2\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{\sqrt{2x+1}+1}+x^2\cdot 2^{x-2}$$

Ответ: $x=2,\ x=4$

2. **Найти все x из интервала $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, удовлетворяющие неравенству**

$$\cos 2x-\sin 2x+\cos x+\sin x\leqslant 1$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}\leqslant x<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<x\leqslant-\frac{\pi}{4}$

3. Основание четырехугольной пирамиды – квадрат, а все боковые грани – прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найти объем пирамиды, если ее высота равна единице, а один из двухгранных углов при вершине равен 120°.

Ответ: $\frac{1}{3}$

4. Найти все значения α, при которых решения системы неравенств

$$x^2+6x+7+\alpha\leqslant 0$$
$$x^2+4x+7\leqslant 4\alpha$$

образуют на числовой оси отрезок длины единица.

Ответ: $\alpha=1,\ \alpha=\frac{7}{4}$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R и описан вокруг другой окружности, которая касается сторон четырехугольника в точках K, L, M, N. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что она в три раза больше площади четырехугольника $KLMN$, а угол между диагоналями AC и BD равен γ.

Ответ: $\frac{4}{3}R^2\sin\gamma$